数理解析研究所講究録
594巻 1986年 22-29

ホッジ構造の変動と交叉コホモロジー群

京都大学数理解析研究所
柏原正樹 (Masaki Kashiwara)
河合隆裕 (Takahiro Kawai)

§0. X をコンパクトケーラー多様体と双有理形的に同値なコンパクト複素多様体，X^* を非特異，且つ，Zariski-open な X の部分集合，H を X^* 上に与えられたホッジ構造の偏極変動 (polarized variation of Hodge structure) とする。この時，H の minimal extension ${}^{\pi}H$ に対し，$H^k(X; {}^{\pi}H)$ はホッジ構造を持つか？ という問に対し，X がコンパクトケーラー多様体，$X \setminus X^*$ は正規交叉超曲面の時，肯定的な解答を与えることが出来たので ([K-K, 1]) その要旨を報告する。尚，同様の結果が独立に E. Cattani, A. Kaplan 及び W. Schmid ([C-K-S]) によっても得られた。

§1. 我々の証明法は，X が 1次元の場合の Zucker([Z]) の議論に強く影響されている；我々は intersection cohomology 群 $H^k(X;{}^{\pi}H)$ と L^2-cohomology 群が一致することを示し，L^2-cohomology 群に対して古典的な調和積分論の手法を用いてホッジ構造を入れる。尚，より代数的な Hodge filtration の入れ方に就て，本報告後に得られた結果に関しては [K-K, 2] を参照され度い。

§2. 先ず，$Y = X \setminus X^*$ の各点の近傍で次のように振舞うケーラー計量 ω を一つ取る：

$$\omega \sim \sum_{j \le l} \partial\bar{\partial} \log \log |z_j|^2 + \sum_{j > l} \sqrt{-1}\, dz_j\, d\bar{z}_j$$

（但し $(z_1, \cdots, z_n)$ は局所座標系であって $\{z_1 \cdots z_l = 0\} = Y$

となるものとする。この計量により X^* が完備となることに注意しておこう。

さて "L^2-k-form" の層 $\mathcal{L}^k(H)$ を、次の前層によって定めることとする。

$$X \supset U \longmapsto \{u \in L^k_{(2)}(X^* \cap U ; H) ;$$
$$du \in L^{k+1}_{(2)}(X^* \cap U ; H)\}.$$

さて、k 次 L^2-コホモロジー群 $H^k_{(2)}(X^* ; H)$ は定義により $H^k(\Gamma(X ; \mathcal{L}^{\cdot}(H)))$ に一致するが、$\mathcal{L}^{\cdot}(H)$ は soft sheaf の複体であることを示し得るので、実は、$H^k(X ; \mathcal{L}^{\cdot}(H))$ とも一致する。従って $\mathcal{L}^{\cdot}(H)$ と πH が quasi-isomorphic であることを示せば我々の目標は達成される。これは局所的な問題であるから

$X=\Delta^n$, $X^*=(\Delta^*)^n$ ($\Delta=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|<1\}$,
$\Delta^*=\{z\in\mathbb{C}\,;\,0<|z|<1\}$ と仮定し，更に
Yの各 stratum の余次元に関する帰納法を用いて $\mathcal{L}^\cdot(H)\cong {}^\pi H$ が $X\setminus\{0\}$ 上で成立しているとしても構わない。ここで

$$X\setminus\{0\}\cong\{t\,;\,0<t\}\times L$$

となる様に t-座標を導入すれば，

$$H^\cdot(X\,;\,\mathcal{L}^\cdot(H))\simeq H^\cdot_{(2)}(X\setminus\{0\}\,;\,H)$$ ー

が成立つ。更に $H^k(X\setminus\{0\}\,;\,\mathcal{L}^\cdot(H))\cong H^k_{(2)}(L;H)$ が帰納法の仮定より有限次元であることを用いて，このコホモロジー群を調和型式の空間 $\mathcal{J}^k$ により表現することが出来る。この時 $H^\cdot_{(2)}(X\setminus\{0\}\,;\,H)$ が，

$$(*)\quad \int \|t^K h(t)\|^2\, dt/t$$

(Kは $\mathcal{J}=\oplus\mathcal{J}^k$ の endomorphism) なるノルム

に関して L^2 になるような $\mathfrak{g}$-valued forms (of t) のコホモロジー群と一致することを示し得る。

従って intersection cohomology 群の特徴付けに関する Goresky-MacPherson の一結果に拠り、

$$(**)\quad H^k_{(2)}(X\setminus\{0\};H) \cong \begin{cases} \mathfrak{g}^k & (k<n) \\ 0 & (k\geq n) \end{cases}$$

を示せば、$\mathcal{L}^{\cdot}(H)$ と πH が quasi-isomorphic であることが証されたこととなる。

さて (**) の証明には、ノルムの定義 (*) により、K の固有値の然るべき評価があれば良い。そのような評価は

(i) $H^k(\pi H)_0$ が H のモノドロミーに拠って定まる部分 Koszul 複体 $\Pi(N_1,\cdots,N_n)$

のコホモロジー群として計算されること

及び

(ii) $H^k(\Pi(N_1, \cdots, N_n))$ の混合ホッジ構造の weight が高さ $w+k$ （w は H の weight）であること（Purity Theorem）

の2つの結果を用いることに拠り得られる。

以上の議論の詳細に就ては [K-K, 3] を参照され度い。

References

[C-K-S] Cattani, E., A. Kaplan and W. Schmid: L_2 and intersection cohomologios for a polarizable variation of Hodge structure. To appear.

[K-K, 1] Kashiwara, M. and T. Kawai: The Poincaré lemma for a variation of polarized Hodge structure. Proc. Japan Acad., 61 (1985), 164–167.

[K-K, 2] ——— : Hodge structure and holonomic systems. Proc. Japan Acad. 62 (1986), 1–4.

[K-K, 3] The Poincaré lemma for variations of Hodge structure. To appear.

[Z] Zucker, S. : Hodge theory with degenerating coefficients : L_2 cohomology in the Poincaré metric. Ann. of Math. 109 (1979), 415-476.